suma+ 83
Artículos
Noviembre 2016
pp. 17-23

Proyecto MegaMenger en Almería

José Luis Rodríguez Blancas
David Crespo Casteleiro

MegaMenger es un proyecto colaborativo y auspiciado por la Universidad Queen Mary de Londres, a partir de una idea de Matt Parker y Laura Taalman. El objetivo del mismo ha sido la construcción de la esponja de Menger más grande realizada hasta la fecha, usando tarjetas de visita y ensambladas con técnicas de papiroflexia. De manera virtual, y con la participación de más de 20 nodos mundiales, se ha conseguido materializar la cuarta iteración de la esponja de Menger. Queremos aportar la experiencia generada por nuestra contribución al proyecto con la tercera iteración realizada en Almería.

Palabras clave: Experiencia de aula, Geometría Fractal, Secundaria, Universidad, Papiroflexia.

MegaMenger Project in Almería

MegaMenger is a collaborative project, sponsored by the Queen Mary University of London, from an idea of Matt Parker and Laura Taalman. Its objective has been building the largest Menger sponge using cards and assembled with origami techniques. Virtually, more than 20 nodes around the world have worked together to materialize the fourth iteration of the Menger sponge. We provide the experience generated by our contribution to the project with the third iteration held in Almería.

Keywords: Classroom experience, Fractal Geometry, High School, College, Origami.

El proyecto Megamenger ha sido impulsado por Matt Parker (Sociedad Matemática de Londres) y Laura Taalman (Universidad James Madison, Virginia) y auspiciado por la Universidad Queen Mary de Londres. El objetivo del mismo es la construcción de la cuarta iteración de la esponja de Menger. La idea original sobre esta propuesta es debida a la profesora Jeannine Mosely, matemática, ingeniera y experta en papiroflexia, que junto a 200 voluntarios comenzó la construcción de una esponja de tercer nivel en 1996, siendo terminada en 2005[1].

El 21 de octubre de 2014 se cumplían 100 años del nacimiento del gran divulgador Martin Gardner y con motivo del *Celebration of Mind,* se eligió esta fecha para la realización de manera virtual de la esponja de Menger más ambiciosa construida hasta la fecha usando tarjetas de visita plegadas y ensambladas mediante técnicas de papiroflexia. Tal evento fue materializado de manera virtual en 20 nodos que realizaron la tercera iteración y otras múltiples localizaciones con las segundas y primeras iteraciones. En España, con la colaboración de la Universidad de Almería, pudimos participar en este evento realizando una esponja de tercer nivel en la que participaron distintos centros educativos de nuestra provincia.

Artículo recibido en *Suma* en septiembre de 2015 y aceptado en julio de 2016

La involucración en esta obra está motivada por su conexión con el Proyecto Alfombra de Sierpinski[2], del que los autores del artículo son sus impulsores, y que pretende realizar este fractal de manera colaborativa con más de 32.000 niños de todo el mundo usando pegatinas de colores.

El fractal esponja de Menger

La esponja de Menger es un fractal descrito por primera vez por el matemático austriaco Karl Menger (1902-1985) en 1926 (Menger, 1926). Este objeto supone una generalización tridimensional de otros fractales introducidos anteriormente, como son el conjunto de Cantor (Cantor, 1884) y la alfombra de Sierpinski (Sierpinski, 1916), por lo que como veremos, comparte con ellos algunas de sus características. Si la alfombra de Sierpinski era una curva universal para todo subconjunto compacto del plano (esto es que cualquier curva dibujada en el plano, independientemente del número de autointersecciones que tenga, es homeomorfa a un subconjunto de la alfombra) la esponja de Menger es universal para cualquier curva en el espacio.

Para su construcción se parte de un cubo que se divide en otros 27 cubos de arista 1/3 del primitivo, eliminando los cubos que ocupan la posición central en cada cara y el del centro del cubo. De esta manera se obtiene un objeto formado por otros 20 cubos. El fractal se genera al iterar el proceso anteriormente descrito, en cada uno de los cubos resultantes (figura 1).

Vamos a estudiar las características más destacables de este objeto, que justificarán el apelativo dado por Jules Henri Poincaré (1854-1912) a los fractales: *galería de monstruos* (Carneiro, 2005), que han sido complementariamente tratadas en el aula junto con la construcción de MegaMenger.

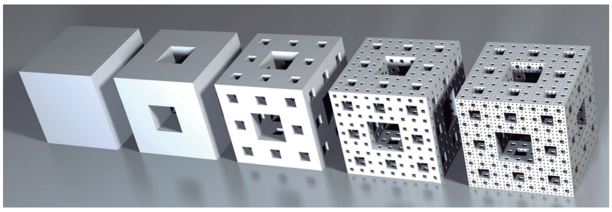

Figura 1. Primeras iteraciones de la esponja de Menger (Fuente: Wikipedia)

En lo sucesivo, supongamos que el cubo de partida tiene una arista de longitud *a*. Dado que en cada iteración dejamos 20 de los 27 cubos en los que hemos subdividido la iteración anterior, tendremos:

Dimensión

La dimensión de homotecia se define como el cociente entre el logaritmo del número de copias necesarias para cubrir la iteración anterior y el logaritmo de la inversa de la razón de semejanza. En nuestro caso:

$$\frac{\log 20}{\log 3} \approx 2{,}727$$

Este objeto tridimensional tiene una dimensión de homotecia menor.

Volumen

Denotando por V_i al volumen de la iteración i, con la convención de que $i = 0, 1, 2, \ldots$, se tiene:

$$V_0 = a^3,\ V_1 = \frac{20}{27}a^3,\ V_2 = \frac{20}{27}V_1 = \left(\frac{20}{27}\right)^2 a^3, \ldots$$

Es decir, que la sucesión que forman los volúmenes de cada una de las iteraciones es una progresión geométrica de razón 20/27. Así, el término general será:

$$V_n = \left(\frac{20}{27}\right)^n a^3,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Y claramente:

$$\lim_{n\to\infty} V_n = 0$$

Con lo que el fractal esponja de Menger es *hueco*, o de forma más precisa diremos que tiene volumen nulo.

Área

Procederemos de manera inductiva, observando qué ocurre con las primeras iteraciones. A primera vista, para resolver la cuestión planteada, hay que distinguir entre los cuadrados exteriores e interiores. Denotaremos para cada iteración n:

$$I_n = \text{Número de cuadrados interiores}$$
$$C_n = \text{Número de cuadrados totales}$$
$$A_n = \text{Área de la esponja}$$

En la primera iteración, fijándonos en los cuadrados orientados hacia arriba, vemos 8 cuadrados exteriores y cuatro interiores (véase figura 1). Este número se multiplica por 6, que es el número de caras del cuadrado. Con la notación expresada:

$$I_1 = 4 \Rightarrow C_1 = \left(8 + I_1\right)\cdot 6 = \left(8+4\right)\cdot 6 = 72$$

En la segunda iteración, orientados hacia arriba aparecen 8^2 cuadrados exteriores y el número de cuadrados interiores será la suma de los $8\cdot 4$ correspondientes a las caras externas de las cuatro copias de la primera iteración que están a la vista, más otros $20\cdot 4$ correspondientes a los cuadrados interiores de las veinte copias de la primera iteración. Así:

$$I_2 = 8\cdot 4 + 20\cdot 4 = 112 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_2 = \left(8^2 + I_2\right)\cdot 6 = \left(64+112\right)\cdot 6 = 1\,056$$

En general, el número de cuadrados interiores de una cara se puede definir de forma recursiva como:

$$\begin{cases} I_1 = 4 \\ I_n = \left(8^{n-1}\cdot 4 + 20\cdot I_{n-1}\right) \end{cases} \qquad [1]$$

La expresión [1], es una ecuación en diferencias lineal de primer orden con coeficientes constantes, que tiene por solución la suma de la solución de la ecuación homogénea asociada y una solución particular de la ecuación [1] (Grimaldi, 1997) y resolviendo el problema de valores iniciales como se ha descrito, obtenemos:

$$I_n = \frac{1}{3}\left(20^n - 8^n\right)$$

Por lo que el número de cuadrados es:

$$C_n = \left(8^n + I_n\right)6 = \left[8^n + \frac{1}{3}\left(20^n - 8^n\right)\right]6 =$$
$$= 4\cdot 8^n + 2\cdot 20^n$$

El área vendrá dada por:

$$A_n = C_n 3^{-2n} a^2 = \left(4\cdot 8^n + 2\cdot 20^n\right)3^{-2n}a^2 =$$
$$= \left[4\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^n + 2\cdot\left(\frac{20}{9}\right)^n\right]a^2$$

Se deduce de lo anterior que:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = +\infty$$

Es decir, que el área de la esponja de Menger es infinita.

Característica de Euler-Poincaré y género

La conocida fórmula de Euler para poliedros convexos

$$\chi = C + V - A = 2$$

donde C, V y A indican el número de caras, vértices y aristas, respectivamente, del poliedro, tiene una generalización a poliedros topológicamente equivalentes a superficies compactas, orientables y cerradas: *la característica de Euler-Poincaré*

$$\chi = 2 - 2g \qquad [2]$$

siendo g el *género* de la superficie, que corresponde al número de asas.

Volviendo al caso que nos ocupa, la enésima iteración de la esponja de Menger es un poliedro no convexo, formado por veinte copias de la iteración anterior que tienen en común alfombras de Sierpinski. Denotaremos por

χ_n = Característica de Euler-Poincaré de la esponja de Menger en la iteración n

χ'_n = Característica de Euler-Poincaré de la alfombra de Sierpinski en la iteración n.

g_n = Género de la esponja de Menger en la iteración n.

Podemos suponer que n toma los valores 0, 1, 2,…, con el acuerdo de que las iteraciones cero de la esponja y la alfombra son respectivamente un cuadrado y un cubo.

Con esta notación, observamos que

$$\chi_0 = 2,\ g_0 = 0;\ \chi_1 = -8,\ g_0 = 5;$$
$$\chi_2 = -160,\ g_2 = 81,\dots$$

Un análisis breve permite demostrar que en la característica de Euler-Poincaré de la alfombra, los vértices y aristas del borde no influyen (pues al estar presentes en el mismo número, se cancelan en su cálculo) así como que

$$\chi'_n = \frac{8 - 8^n}{7},\ \forall n \geq 0.$$

La característica de Euler-Poincaré de una iteración de la esponja, vendrá dada por las que aporten 20 iteraciones anteriores. Al pegarlas, estaríamos contando dos veces una de las caras (alfombra de Sierpinski). En total, tenemos 24 uniones contadas dos veces por lo que[3]:

$$\chi_{n+1} = 20\chi_n - 48\chi'_n = \\ = 20\chi_n - \frac{48}{7}\left(8 - 8^n\right),\ \forall n \geq 0.$$

El problema de valores iniciales es

$$\begin{cases} \chi_{n+1} = 20\chi_n - \frac{48}{7}\left(8 - 8^n\right) \\ \chi_0 = 2 \end{cases}$$

Resolviendo la ecuación con las técnicas descritas en [1], la característica de Euler-Poincaré de la esponja de Menger de nivel n, es

$$\chi_n = \frac{-2}{133}\left(-192 + 38\cdot 8^n + 21\cdot 20^n\right),\ \forall n \geq 0.$$

Sustituyendo en [2] y despejando, obtenemos la expresión del género para la iteración n

$$g_n = -59 + 38\cdot 8^n + 21\cdot 20^n,\ \forall n \geq 0.$$

Consideraciones técnicas

El Departamento de Matemáticas de la Universidad de Almería y el Museo de Almería, también se sumaron a la celebración del centenario del nacimiento de Martin Gardner, organizando actividades divulgativas de Matemáticas para familias, grupos de escolares, y en general para todas aquellas personas que quisieran conocer de cerca el fascinante mundo de los fractales. De la mano del Proyecto MegaMenger, nos propusimos la construcción de la tercera iteración de la esponja de Menger usando tarjetas de visita.

Veamos algunos datos técnicos del proyecto.

La tercera iteración necesita 20^3 cubitos y cada uno de ellos emplea 6 tarjetas (una por cada cara) de 8,5 cm × 5,5 cm ensambladas. Así pues, se emplearon $6 \cdot 20^3 = 48\,000$ tarjetas blancas. Además, en el panelado de las caras, se usaron tarjetas decoradas, cuyo número viene dado por

$$C_3 = 4\cdot 8^3 + 2\cdot 20^3 = 18\,048.$$

Cada arista está formada por 3^3 cubitos de lado 5,5 cm, resultando la construcción final un cubo cuya arista mide 148,5 cm. Las tarjetas empleadas tenían una densidad de 180 g/m^2, por lo que el peso de la obra ascendió a 55,579 kg.

La envergadura de la propuesta, y la experiencia de Jeannine Mosely, aconsejaban involucrar a un número elevado de colaboradores. Junto con alumnos universitarios de los Grados en Matemáticas, Educación Primaria e Infantil, extendimos la propuesta a centros de enseñanza de Primaria, Secundaria y Bachillerato tanto de la capital como de la provincia, participando en la construcción el CEIP Padre Manjón (Benahadux) y los IES: Alborán, Albujaira (Huércal–Overa), Azcona, Nicolás Salmerón, Francisco Montoya (Las Norias de Daza, El Ejido), Los Ángeles, Maestro Padilla, Manuel de Góngora (Tabernas) y Río Aguas (Sorbas) (figura 2).

No queremos dejar de destacar la importante colaboración que tuvieron algunos maestros e internos del Centro Penitenciario «El Acebuche» en la construcción de cubos y de manera especial, en una técnica diseñada por ellos para doblar las tarjetas que supuso un considerable ahorro de tiempo.

Una de las dificultades con la que nos encontramos fue el hecho de que cuando los alumnos conocían el proceso constructivo y habían adquirido el bagaje suficiente, el trabajo en el Centro tocaba a su fin. Una propuesta llevada a cabo con un *equipo fijo de colaboradores*, hubiese hecho más rápida y precisa la obra (pues al revisar las piezas, qué duda cabe que había errores en las mismas, debido a esta inexperiencia inicial).

Ensamblado

Como ya hemos citado en el apartado anterior, debemos doblar 6 tarjetas para que al ensamblarlas se forme un cubo (unidad mínima que nos propusimos que conociesen todos los participantes) y montarlas siguiendo el esquema de la figura 3.

Construir los 20 cubos de la primera iteración para luego ensamblarlos, se convirtió en una ardua tarea, por lo que diseñamos otra unidad mínima formada por 5 cubos, que nombramos *trípode*. A su vez, por la dificultad que conlleva panelar el interior de la primera iteración, en los trípodes se iban colocando las tarjetas decoradas que eran visibles en el interior (figuras 4 y 5).

Con cuatro de estas piezas se forma la primera iteración, pasando esta ahora a ser la unidad mínima (figura 6).

Con veinte primeras iteraciones formamos la segunda. Hay que tener en cuenta que es el momento de panelar las caras visibles del interior de esta iteración. El objetivo estaría concluido al formar otras 20 segundas iteraciones (figura 7).

Figura 2. Proceso constructivo en el Museo de Almería

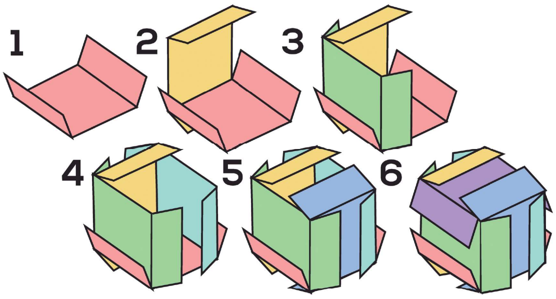

Figura 3
(Fuente: <www.megamenger.com>)

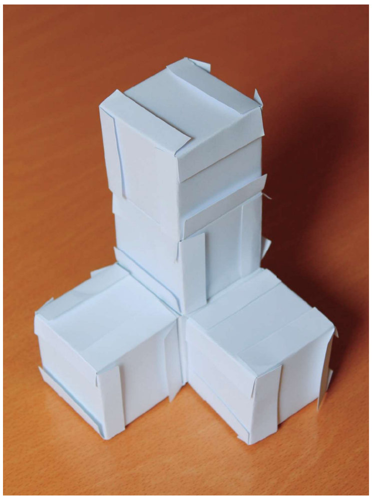

Figura 4

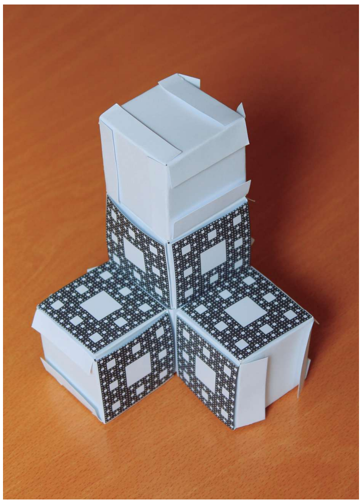

Figura 5

Figura 6

Figura 7

En el ensamblaje de las segundas iteraciones no debemos panelar las caras ocultas ni los cubos que forman las aristas de unión entre ellas (figura 8).

Presentación del proyecto

Tras la finalización de la obra se realizó una presentación al público en enero de 2015 en el Museo de Almería a la que asistieron una nutrida representación de los centros participantes y acompañados de la Delegada de Educación Isabel Arévalo Barrionuevo, del actual Rector de la Universidad de Almería Carmelo Rodríguez Torreblanca así como del Director del Museo Arturo Pino Ruiz, expusimos las líneas maestras del proyecto introduciendo al público generalista el concepto de fractal y su presencia en nuestro entorno.

Valoración y resultados de la experiencia

Los fractales geométricos autosimilares constituyen una amplia familia cuyas propiedades hacen de ellos objetos versátiles y permiten ser tratados en todas las etapas educativas. Esta afirmación se encuentra avalada por los diferentes niveles que han participado en el proyecto MegaMenger, desde la Educación Obligatoria (Primaria y Secundaria) hasta los postobligatorios (Bachillerato y Universidad). De forma paralela a la construcción han sido abordados en el aula contenidos graduados al nivel propuesto: cálculo del número de tarjetas, peso de la construcción, área, volumen, dimensión o género de la superficie.

El trabajo manipulativo que requiere la actividad potencia el aprendizaje inductivo y la visión espacial, permitiendo deducir propiedades como la del límite de una sucesión de una manera intuitiva, poniendo de manifiesto *situaciones paradójicas* como es el caso del área y el volumen; mientras que el primero aumenta, el segundo disminuye. Y esta relación se hace cada vez más exacerbada al aumentar el número de iteraciones.

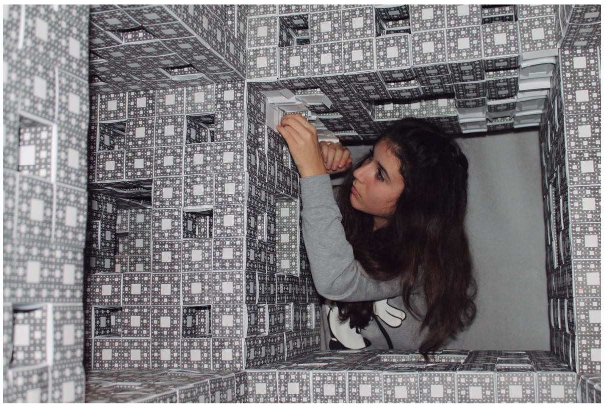

Figura 8

Figura 9. Presentación de la obra en el Museo de Almería

El hecho de que el trabajo se realice de manera cooperativa permite amplificar la relación de interdependencia positiva entre los escolares y la enseñanza entre iguales como medio para la construcción de esta figura en la que han participado más de 1 000 alumnos y voluntarios, y que se encuentra expuesta en el hall del edificio CITE III, que alberga, en la Universidad de Almería, la Facultad de Ciencias Experimentales a la que se encuentra adscrito el Grado en Matemáticas.

Referencias bibliográficas

Ahlfors, L., y L. Sario, (1961), *Riemann Surfaces*, Princeton University Press, Princeton.

Cantor, G. (1884), «De la puissance des ensembles parfait de points», *Acta Mathematica*, n.º 4, 381-392.

Carneiro, M. (2005), *De hormigas y personas*, ESIC, Madrid.

Grimaldi, R. (1997), *Matemáticas discreta y combinatoria*, Pearson, Naucalpan de Juárez.

Menger, K. (1926), «General Spaces and Cartesian Spaces», *Communications to the Amsterdam Academy of Sciences*.

Sierpinski, W. (1916), «Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoquet et continue detoute courbe donée», *C.R. Acad. París*, 629-632.

José Luis Rodríguez Blancas
Universidad de Almería
<jlrodriblancas@gmail.com>

David Crespo Casteleiro
IES Ciudad de Dalías (Almería)
<davidcasteleiro@hotmail.com>

1 Puede ampliarse la información mostrada, consultando en la dirección web <http://www.nytimes.com/imagepages/2005/06/21/science/21orig_CA0.ready.html>.

2 Los pormenores del Proyecto Alfombra de Sierpinski se encuentran alojados en la dirección:

https://topologia.wordpress.com/2014/06/03/proyecto-alfombra-de-sierpinski/.

3 El razonamiento usado en este párrafo puede aplicarse de maneral alternativa al utilizado en el apartado «Área» para obtener la expresión del número de cuadrados C_n.